

Подставив эти выражения в равенство (1), получим $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{OM}$ равны $\{x; y; z\}$, т. е. координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора $\vec{OM}$, что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\vec{AB}$ через координаты его начала A и конца B . Пусть точка A имеет координаты $(x_1; y_1; z_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\vec{AB}$ равен разности векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ (рис. 180), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$.

Но координаты векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ совпадают с соответствующими координатами точек B и A : $\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$. Поэтому вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

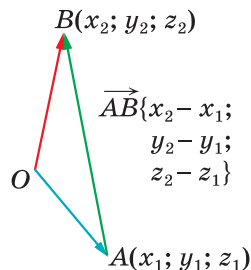


Рис. 180

74 Простейшие задачи в координатах

а) **Координаты середины отрезка.** В системе координат $Oxyz$ отметим точку A с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку B с координатами $(x_2; y_2; z_2)$. Выразим координаты $(x; y; z)$ середины C отрезка AB через координаты его концов (рис. 181). Так как точка C — середина данного отрезка AB , то

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}). \quad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\vec{OC}$, $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ равны соответствующим координатам трёх точек C , A и B : $\vec{OC} \{x; y; z\}$, $\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$. Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

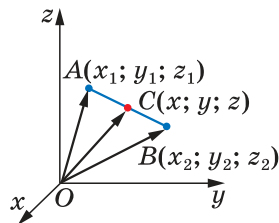


Рис. 181

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что длина вектора $\vec{a} \{x; y; z\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

Отложим на осях координат векторы $\vec{OA}_1 = x\vec{i}$, $\vec{OA}_2 = y\vec{j}$, $\vec{OA}_3 = z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (рис. 182). Длина вектора $\vec{OA}$ выражается через длины векторов $\vec{OA}_1$, $\vec{OA}_2$ и $\vec{OA}_3$ следующим образом:

$$|\vec{OA}| = \sqrt{|\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2}. \quad (4)$$

В самом деле, если точка A не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 182), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2.$$

Во всех других случаях расположения точки A (точка A лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\vec{OA}_1| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\vec{OA}_2| = |y\vec{j}| = |y|$, $|\vec{OA}_3| = |z\vec{k}| = |z|$ и $\vec{OA} = \vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) Расстояние между двумя точками.

Рассмотрим две произвольные точки: точку M_1 с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку M_2 с координатами $(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 183). Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор $\vec{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. По формуле (3)

$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Но $d = |\vec{M_1M_2}|$.

Таким образом, расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

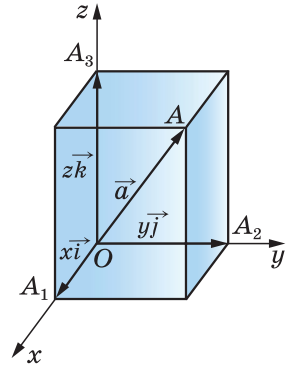


Рис. 182

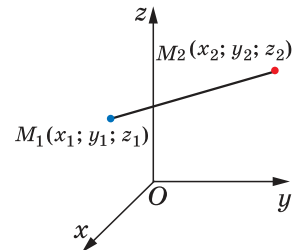


Рис. 183

- 653 Даны векторы $\overrightarrow{OA}\{3; 2; 1\}$, $\overrightarrow{OB}\{1; -3; 5\}$ и $\overrightarrow{OC}\left\{-\frac{1}{3}; 0,75; -2\frac{3}{4}\right\}$. Запишите координаты точек A , B и C , если точка O — начало координат.
- 654 Даны точки $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$. Запишите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если точка O — начало координат.
- 655 Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(3; -1; 2)$, $B(2; -1; 4)$; б) $A(-2; 6; -2)$, $B(3; -1; 0)$; в) $A\left(1; \frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$.
- 656 Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(1; 6; 2)$, $B(2; 3; -1)$, $C(-3; 4; 5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
- 657 Даны точки $A(3; -1; 5)$, $B(2; 3; -4)$, $C(7; 0; -1)$ и $D(8; -4; 8)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны. Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?
- 658 Лежат ли точки A , B и C на одной прямой, если: а) $A(3; -7; 8)$, $B(-5; 4; 1)$, $C(27; -40; 29)$; б) $A(-5; 7; 12)$, $B(4; -8; 3)$, $C(13; -23; -6)$; в) $A(-4; 8; -2)$, $B(-3; -1; 7)$, $C(-2; -10; -16)$?

Решение

а) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки A , B и C лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки A , B и C не лежат на одной прямой. Найдём координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{-8; 11; -7\}$, $\overrightarrow{AC}\{24; -33; 21\}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, следовательно, точки A , B и C лежат на одной прямой.

- 659 Лежат ли точки A , B , C и D в одной плоскости, если:
а) $A(-2; -13; 3)$, $B(1; 4; 1)$, $C(-1; -1; -4)$, $D(0; 0; 0)$;
б) $A(0; 1; 0)$, $B(3; 4; -1)$, $C(-2; -3; 0)$, $D(2; 0; 3)$;
в) $A(5; -1; 0)$, $B(-2; 7; 1)$, $C(12; -15; -7)$, $D(1; 1; -2)$?
- 660 Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ имеет координаты

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

- 661 Точка M — середина отрезка AB . Найдите координаты: а) точки M , если $A(0; 3; -4)$, $B(-2; 2; 0)$; б) точки B , если $A(14; -8; 5)$, $M(3; -2; -7)$; в) точки A , если $B(0; 0; 2)$, $M(-12; 4; 15)$.
- 662 Середина отрезка AB лежит на оси Ox . Найдите m и n , если:
а) $A(-3; m; 5)$, $B(2; -2; n)$; б) $A(1; 0; 5)$, $B(1; m; 2n)$; в) $A(0; m; n+1)$, $B(1; n; -m+1)$; г) $A(7; 2m+n; -n)$, $B(-5; -3; m-3)$.

- 663** Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$; б) $A(-35; -17; 20)$, $B(-34; -5; 8)$.
- 664** Найдите длины векторов: $\vec{a}\{5; -1; 7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$.
- 665** Даны векторы $\vec{a}\{3; -2; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; 1\}$ и $\vec{c}\{-3; 2; 1\}$. Найдите: а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; г) $|\vec{a}-\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$; е) $\sqrt{14}|\vec{c}|$; ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$.
- 666** Даны точки $M(-4; 7; 0)$ и $N(0; -1; 2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN .
- 667** Даны точки $A\left(\frac{3}{2}; 1; -2\right)$, $B(2; 2; -3)$ и $C(2; 0; -1)$. Найдите: а) периметр треугольника ABC ; б) медианы треугольника ABC .
- 668** Определите вид треугольника ABC , если: а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$; б) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$; в) $A(5; -5; -1)$, $B(5; -3; -1)$, $C(4; -3; 0)$; г) $A(-5; 2; 0)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(-5; 2; -2)$.
- 669** Найдите расстояние от точки $A(-3; 4; -4)$ до: а) координатных плоскостей; б) осей координат.
- 670** На каждой из координатных плоскостей найдите такую точку, расстояние от которой до точки $A(-1; 2; -3)$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой координатной плоскости до точки A .
- 671** На каждой из осей координат найдите такую точку, расстояние от которой до точки $B(3; -4; \sqrt{7})$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой оси до точки B .
- 672** Даны точки $A(1; 0; k)$, $B(-1; 2; 3)$ и $C(0; 0; 1)$. При каких значениях k треугольник ABC является равнобедренным?
- 673** Даны точки $A(4; 4; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 3; 4)$ и $D(1; 4; 4)$. Докажите, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция.
- 674** Найдите точку, равноудалённую от точек $A(-2; 3; 5)$ и $B(3; 2; -3)$ и расположенную на оси: а) Ox ; б) Oy ; в) Oz .
- 675** Даны точки $A(-1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ и $C(0; -1; 1)$. Найдите точку, равноудалённую от этих точек и расположенную на координатной плоскости: а) Oxy ; б) Oyz ; в) Ozx .
- 676** Даны точки $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Найдите: а) координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника AOB ; б) координаты точки, равноудалённой от вершин тетраэдра $OABC$.
- 677** Отрезок CD длины m перпендикулярен к плоскости прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=b$ и $BC=a$. Введите подходящую систему координат и с помощью формулы расстояния между двумя точками найдите расстояние от точки D до середины гипотенузы этого треугольника.
- 678** Напишите уравнение сферы радиуса R с центром A , если: а) $A(2; -4; 7)$, $R=3$; б) $A(0; 0; 0)$, $R=\sqrt{2}$; в) $A(2; 0; 0)$, $R=4$.