

Задача

Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} \{1; -2; 0\}$, $\vec{b} \{0; 3; -6\}$, $\vec{c} \{-2; 3; 1\}$.

Решение

По правилу 3⁰ вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2; -4; 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0; -1; 2\}$. Так как $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, то его координаты $\{x; y; z\}$ можно вычислить по правилу 1⁰: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0; -2; 3\}$.

73 Связь между координатами векторов и координатами точек

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало — с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки. Докажем, что **координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора**.

Обозначим координаты данной точки M через $(x; y; z)$. Пусть M_1, M_2, M_3 — точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 179). Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \quad (1)$$

Докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. В самом деле, если точка M_1 лежит на положительной полуоси абсцисс, как на рисунке 179, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если точка M_1 лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если точка M_1 совпадает с точкой O , то $x = 0$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$. Поэтому $x\vec{i} = \vec{0}$, и снова справедливо равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$.

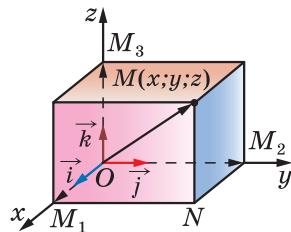


Рис. 179

Подставив эти выражения в равенство (1), получим $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{OM}$ равны $\{x; y; z\}$, т. е. координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора $\vec{OM}$, что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\vec{AB}$ через координаты его начала A и конца B . Пусть точка A имеет координаты $(x_1; y_1; z_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\vec{AB}$ равен разности векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ (рис. 180), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$.

Но координаты векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ совпадают с соответствующими координатами точек B и A : $\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$. Поэтому вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

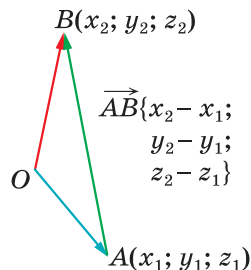


Рис. 180

74 Простейшие задачи в координатах

а) **Координаты середины отрезка.** В системе координат $Oxyz$ отметим точку A с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку B с координатами $(x_2; y_2; z_2)$. Выразим координаты $(x; y; z)$ середины C отрезка AB через координаты его концов (рис. 181). Так как точка C — середина данного отрезка AB , то

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}). \quad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\vec{OC}$, $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ равны соответствующим координатам трёх точек C , A и B : $\vec{OC} \{x; y; z\}$, $\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$. Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

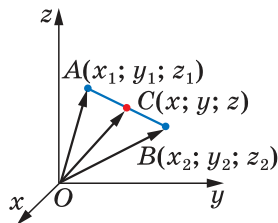


Рис. 181

- 653** Даны векторы $\overrightarrow{OA}\{3; 2; 1\}$, $\overrightarrow{OB}\{1; -3; 5\}$ и $\overrightarrow{OC}\left\{-\frac{1}{3}; 0,75; -2\frac{3}{4}\right\}$. Запишите координаты точек A , B и C , если точка O — начало координат.
- 654** Даны точки $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$. Запишите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если точка O — начало координат.
- 655** Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(3; -1; 2)$, $B(2; -1; 4)$; б) $A(-2; 6; -2)$, $B(3; -1; 0)$; в) $A\left(1; \frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$.
- 656** Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(1; 6; 2)$, $B(2; 3; -1)$, $C(-3; 4; 5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
- 657** Даны точки $A(3; -1; 5)$, $B(2; 3; -4)$, $C(7; 0; -1)$ и $D(8; -4; 8)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны. Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?
- 658** Лежат ли точки A , B и C на одной прямой, если: а) $A(3; -7; 8)$, $B(-5; 4; 1)$, $C(27; -40; 29)$; б) $A(-5; 7; 12)$, $B(4; -8; 3)$, $C(13; -23; -6)$; в) $A(-4; 8; -2)$, $B(-3; -1; 7)$, $C(-2; -10; -16)$?

Решение

- а) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки A , B и C лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки A , B и C не лежат на одной прямой. Найдём координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{-8; 11; -7\}$, $\overrightarrow{AC}\{24; -33; 21\}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, следовательно, точки A , B и C лежат на одной прямой.
- 659** Лежат ли точки A , B , C и D в одной плоскости, если:
а) $A(-2; -13; 3)$, $B(1; 4; 1)$, $C(-1; -1; -4)$, $D(0; 0; 0)$;
б) $A(0; 1; 0)$, $B(3; 4; -1)$, $C(-2; -3; 0)$, $D(2; 0; 3)$;
в) $A(5; -1; 0)$, $B(-2; 7; 1)$, $C(12; -15; -7)$, $D(1; 1; -2)$?
- 660** Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ имеет координаты
- $$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$
- 661** Точка M — середина отрезка AB . Найдите координаты: а) точки M , если $A(0; 3; -4)$, $B(-2; 2; 0)$; б) точки B , если $A(14; -8; 5)$, $M(3; -2; -7)$; в) точки A , если $B(0; 0; 2)$, $M(-12; 4; 15)$.
- 662** Середина отрезка AB лежит на оси Ox . Найдите m и n , если:
а) $A(-3; m; 5)$, $B(2; -2; n)$; б) $A(1; 0; 5)$, $B(1; m; 2n)$; в) $A(0; m; n+1)$, $B(1; n; -m+1)$; г) $A(7; 2m+n; -n)$, $B(-5; -3; m-3)$.